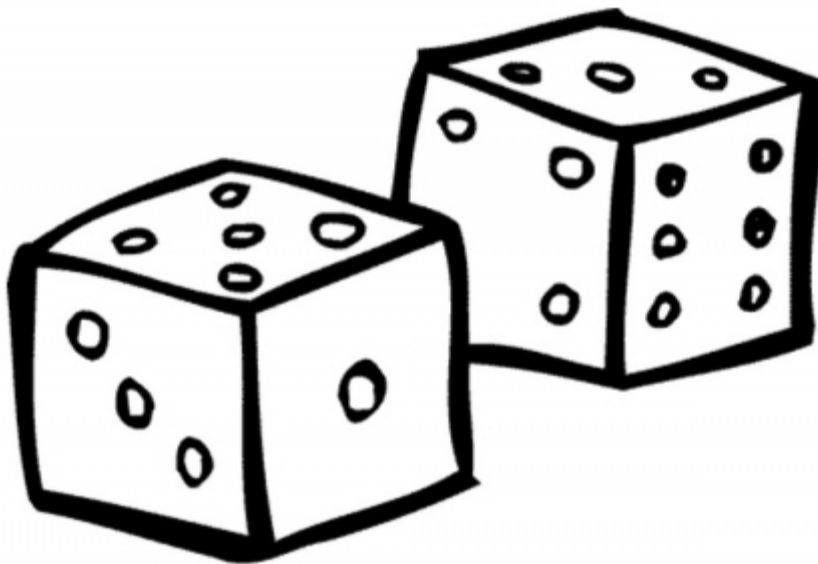


# INTRODUCCIÓN AL PENSAMIENTO ALEATORIO

Basado en texto del Profesor Marco Julio Rivera Avellaneda

En la sociedad actual la estadística aporta métodos para analizar datos, determinar relaciones entre variables, presentar información, hacer predicciones y proporciona criterios para la toma de decisiones.

En Colombia se ha iniciado la enseñanza de la estadística incluso desde la primaria y en la educación básica y media. En muchas instituciones educativas se ha introducido la asignatura estadística desde el grado sexto. Con la introducción de los pensamientos matemáticos, se habla hoy en día del pensamiento aleatorio y los sistemas de datos.



Se propone que los estudiantes:

- ⤴ Planteen preguntas de investigación y diseñen los estamentos apropiados para la recolección de los datos.
- ⤴ Organicen los datos en tablas.
- ⤴ Realicen gráficas estadísticas.
- ⤴ Determinen estadígrafos para comprender el comportamiento de los datos.
- ⤴ Analicen las tablas las gráficas produzcan conclusiones y realicen predicciones.
- ⤴ Razonen sobre la incertidumbre y el azar.
- ⤴ Adquiera la capacidad para comunicar ideas estadísticas.

Se propone desarrollar el pensamiento estadístico haciendo énfasis en el análisis exploratorio de datos y sobre todo en los procesos de razonamiento estadístico demostrando las aplicaciones y la utilidad de la estadística.

Para lograr lo anterior se propone trabajar por proyectos, teniendo en cuenta los elementos de un problema estadístico de investigación. La selección de los temas se puede hacer por consenso entre los estudiantes y el docente. La propuesta incluye el uso de programas de fácil manejo como la hoja electrónica Excel.

En las instituciones de educación media, se pueden realizar concursos de proyectos de estadística y olimpiadas de estadística. Lo que se trata es contextualizar la enseñanza de la estadística mediante proyectos relacionados con problemas cercanos a los estudiantes.

En el presente curso de pensamiento aleatorio se quiere desarrollar mediante talleres, que buscan realizar una serie de experimentos de manera práctica que permitan al estudiante familiarizarse con los conceptos básicos de la teoría de probabilidades y si es posible llegar a formalizarlos.

Los talleres son propuestas, en la medida en que el estudiante puede modificarlos, cambiarlos, adaptarlos de tal manera que en lo posible se puedan realizar de manera práctica.

La propuesta metodológica para desarrollarlos es la siguiente:

- ⤴ Cada taller se asigna a un grupo quien es el encargado de liderar el proceso de ejecución. Lo anterior implica que se debe documentar al respecto y dirigir la ejecución.
- ⤴ Al final de la ejecución de cada taller se realizará un debate, dirigido por el grupo líder quien elegirá un moderador y un secretario. El moderador será el encargado de dirigir la discusión y concretar las conclusiones. El secretario tomará nota de las conclusiones.
- ⤴ Cada debate finalizará con los procesos de autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación.

## A. PRIMER TALLER. PREGUNTAS BÁSICAS SOBRE ALEATORIEDAD

Autores: Adolfo Andrés Villamarín y Eduar Emilio Baquero Ortúa.

La Universidad de Cundinamarca apoyada por la facultad de matemáticas en la materia pensamiento aleatorio con los estudiantes de quinto semestre de dicha facultad desarrollaron una serie de incógnitas con el fin de explorar qué tanto conocimiento se tiene acerca de algunas palabras planteadas a través de la estadística y la probabilidad de aplicación en la vida real, su importancia y, sobre todo, la relación entre ellas. En este informe dirigido por el profesor Marco Julio Rivera Avellaneda, licenciado de la misma universidad, se pretende que todos aquellos que estén interesados en conocer la forma en que fue desarrollado el debate, la estructura utilizada para el planteamiento de las preguntas, las apreciaciones de los estudiantes y respuestas frente a distintas motivaciones, puedan enseñarlo a estudiantes de grados básicos.

La razón de este informe surge apartir del primer taller donde nos planteaban una serie de preguntas que, por medio intuitivo, resolvimos, para muchos esta experiencia fue demasiado gratificante ya que en el idioma cotidiano se malinterpretan muchas palabras.

Allí se aclararon conceptos básicos en lo que el común de la gente da significado erróneo, como por ejemplo: Visión es interpretado como la capacidad de intuir un acontecimiento futuro; mientras que en realidad es la facultad de ver el mundo exterior por medio del ojo. He aquí los cuestionamientos planteados:

### ✦ ¿Para usted que es la estadística?...

La definición real es: *Ciencia y rama de las matemáticas que recolecta, organiza y analiza datos para un fin específico.* Lo que se debatió para este planteamiento fue muy poco ya que como estudiantes de matemáticas se considera que al hablar de estadística se esta pensando en una relación de datos numéricos presentada de una forma ordenada y sistemática; esta idea es una consecuencia del concepto popular que existe sobre el término y cada vez se esta extendiendo debido a la influencia por los medios de difusión (el periódico, la televisión) ya que nos aborda diariamente con ese tipo de información. Esta sería la mejor forma para enseñar la estadística; por ejemplo a niños de primero de primaria, si los ponemos a analizar con sus caricaturas favoritas comportamientos que sean observados por ellos para discutir de forma grupal y así verificar cuales son las más comunes, manejando muy bien la información para aclarar los conceptos que se desprenden de la estadística.

### ✦ ¿Qué es la incertidumbre?

Es un caso particular de riesgo que ocurre cuando no se tienen antecedentes históricos de las probabilidades de ocurrencia de eventos o situaciones y por tanto no se puede determinar una probabilidad de ocurrencia objetiva de los mismos; esto genera “Duda,” ya que como seres humanos vivimos de incertidumbre al no tener conocimiento del mundo futuro; por otra parte lo que se debatió en este cuestionamiento fue: ¿será que existe un destino trazado por Dios para los hombres?, ¿cada persona tendrá un destino?

### ✦ ¿Qué entiende por probabilidad?

En un proceso aleatorio, razón entre el número de casos favorables y el número de casos posibles. Considerado como grado de certeza que tengo de que el evento ocurra; en las matemáticas, es la ciencia que se ocupa de medir o determinar cuantitativamente la posibilidad de que ocurra un determinado suceso.

Cuando se socializó esta pregunta se menciona que la probabilidad es una de las formas de medir la incertidumbre. Porque si sabemos que algo nos va a ocurrir por sentido de conservación tratamos de evitarlo.

Para enseñar a un grado inferior se podría inducir a los niños al método de experimentación por medio de juegos como con los dados, el concétre se o simplemente juegos matemáticos como el rompecabezas, entre otros.

### ✦ ¿Qué entiende por azar?

*Desgracia inesperada o casualidad, caso fortuito.*

- Lo que se entiende por azar es la ocurrencia de algo inesperado.
- Ignorancia completa o relativa acerca de las condiciones de realización de un suceso.
- Está ligado a la casualidad.
- Acción-experimento.
- Incertidumbre al realizar un experimento.

Para socializar las conclusiones tuvimos en cuenta que el azar expresa interacción o conexión entre distintos fenómenos; que está sujeto a leyes y su campo es muy amplio para tratar de encontrar alguna respuesta científica definitiva; siendo el hombre una ficha mas en el transcurrir del mundo y sin la capacidad de predecir lo que esta preparado, como un temblor, un tornado... etc. Surgen una serie de interrogantes que difícilmente tendrían respuesta:

¿habrá un destino para la humanidad así como lo hubo para los dinosaurios? ¿Será capaz el hambre de destruir el planeta en su codicia y su afán de poder?, entre otras.

### ♣ **¿Qué entiende por aleatorio?**

*Pertenece o relativo al juego de azar. Dependiente de algún suceso fortuito.*

Cumple la misma función que la probabilidad ya que actúa de acuerdo con la naturaleza y el hombre con respecto al medio, por comportamientos y acciones fortuitas.

Se concluye que no es recurrente, varía de manera impredecible, es algo que ocurre de manera diferente en un número contado de pasos.

### ♣ **¿Qué es un proceso estocástico?**

*Depende del azar y del tiempo.* Proceso estocástico, proceso en el que un sistema cambia de forma aleatoria entre diferentes estados, a intervalos regulares o irregulares.

Un ejemplo típico, con transiciones regulares, es la llamada 'ruina del jugador'. Un jugador apuesta repetidamente por un acontecimiento aleatorio (como la tirada de un dado), ganando o perdiendo 1 unidad con probabilidades respectivas  $p$  y  $1-p$ . Por ejemplo, si apuesta por un 3, la probabilidad  $p$  de que gane será de  $1/6$ , y la probabilidad  $(1-p)$  de que pierda será de  $5/6$ . El juego continúa hasta que el dinero del jugador llega a cero (ruina) o a una cantidad determinada, por ejemplo 1.000 unidades (éxito). Éste es un ejemplo de 'recorrido aleatorio' unidimensional, que puede representarse mediante un punto  $x$  que se mueve aleatoriamente a lo largo de una línea entre 0 y 1.000. En cada transición (cada apuesta),  $x$  se mueve una unidad hacia la izquierda o hacia la derecha, con probabilidades respectivas de  $1/6$  y  $5/6$ .

Otro ejemplo típico de proceso estocástico con transiciones irregulares es el tamaño de una cola, que aumenta o disminuye de tamaño de forma aleatoria a medida que los clientes llegan o son atendidos en intervalos impredecibles. De modo similar, las poblaciones de los países varían a través de los nacimientos, muertes y migraciones, mientras que las bolsas se ven afectadas por acontecimientos financieros y políticos. En todos estos casos, el momento y naturaleza de las transiciones individuales es impredecible, aunque se puede describir el comportamiento medio a largo plazo utilizando probabilidades.

### ♣ **¿Qué es un número aleatorio y como se pueden generar?**

Es un resultado de una variable u casualidad especificada por una función de distribución que probablemente no vuelven a salir ya que funcionan como intervalos numéricos y dependen del azar. Se pueden generar por medio de:

- Dados
- Balotas
- Calculadora (previa manipulación)
- Programa de computadora que cumple la misma de la calculadora muestra números al azar con una función.

### ♣ **Enumere cinco situaciones de la vida diaria en que se utilice la probabilidad.**

- Los sentimientos por ejemplo dependen de factores externos como los recuerdos ya que no se depende de ellos en el momento de empezar el día.
- Asimilar un conocimiento depende de factores externos como la capacidad de atención del receptor, el mismo docente y la actitud y aptitud de la persona.
- Manejo del tiempo ya que no se puede repetir la misma acción al otro día dependiendo de factores externos como las actividades planteadas durante el día si saber que contratiempo suceda.
- El hecho de recibir una llamada por celular a menos que uno sepa que lo van a llamar aplica la probabilidad al no tener idea de quien lo llama.
- La asistencia de un compañero a clase depende de miles de cuestiones inusuales para cumplir su cometido.

### ♣ **Enumere tres situaciones en las que no se utilice la probabilidad.**

El hecho de saber que el día tiene 24 horas - Los 365 días del año - Las necesidades fisiológicas del cuerpo.

### ♣ **¿Cuáles son las características de un experimento aleatorio?**

- No se conoce resultado.
- Se pueden conocer las posibles respuestas.
- Se puede desarrollar a cualquier hora y en cualquier lugar sin hacer cambio o mejoramiento de un experimento.

✧ **¿Qué significa determinismo y cuáles son sus características de un experimento determinístico?**

*Doctrina filosófica que afirma que cualquier acontecimiento, mental o físico, responde a una causa, y así, una vez dada la causa, el acontecimiento ha de seguirse sin posible variación.* Sugiere que nuestra vida está regida por circunstancias que escapan a nuestro control de modo que nadie es responsable de lo que hace o deja de hacer (no existe el libre albedrío).

El determinismo es algo que ya está establecido e impuesto por la naturaleza como la reproducción animal, el clima etc. Esta era muy utilizada en la física clásica (por ejemplo, el comportamiento de una bola de billar al ser golpeada “a diferente fuerza” por otra bola puede predecirse mediante cálculos matemáticos basados en cualquiera de los dos tipos de mecánica con resultados casi idénticos pero no iguales).

✧ **¿Cree usted que en nuestra vida la mayoría de acontecimientos son aleatorios o determinísticos?**

La mayoría de acontecimientos son aleatorios ya que como se menciono anteriormente con el azar la probabilidad la incertidumbre apoyan esta teoría. Ya que lo único determinístico es la misma vida mas no los acontecimientos.

✧ **Mencione algunos juegos que usted conozca y sean de azar.**

- Ruleta
- Rana
- Bingo
- Perinola
- Moneda
- Tiro al blanco
- Canicas
- Tejo
- Domino
- Balotas
- Dados
- Busca minas

✧ **¿Son aleatorios o determinísticos los acontecimientos que ocurren en el universo, en las estrellas, en las galaxias o huecos negros?**

Determinísticos ya que nada ocurre de repente todo tiene una razón de ser como el “numero aureo” apoyado en la construcción de la naturaleza.

✧ **Enumere tres ciencias que se fundamenten en el estudio de fenómenos aleatorios.**

- Genética
- Química
- Física cuántica

✧ **¿Cuál cree usted que es la relación entre estadística y probabilidad?**

Mientras que la estadística una analiza datos para así observar la probabilidad.

## B. ESTRATEGIAS PARA GANAR EN EL BINGO

Como todos sabemos, el Bingo es un juego de chances y suerte. Pero lo que no todo el mundo sabe es que las probabilidades de ganar en este juego pueden aumentar enormemente si se utiliza un buen sistema de reglas y estrategias.

Ganar al Bingo no es tan sólo un tema de suerte, como muchos pueden pensar. Existen secretos y estrategias para inclinar las probabilidades a nuestro favor y convertirnos de esta manera en mejores jugadores.

Mucha gente se pregunta por qué en el juego de Bingo -que es un juego de azar donde existe un 50% de probabilidades de ganar para ambas partes- generalmente es el casino quien gana.

La principal respuesta es bastante simple: cuando un jugador juega y gana dinero, se entusiasma y continúa jugando, buscando así ganar aún más dinero, lo cual no ocurre muy seguido. Esto genera una sensación de frustración en el jugador, quien se retira perdiendo.

Uno de los secretos para poder ganar más dinero es retirarse a tiempo.

La estrategia básica tiene que ver con la selección de los cartones. Siempre que sea posible, elija sus propios cartones. Ésa es la primera y la más importante de las reglas. Procure quedarse con cartones uniformes, que contengan números impares.

Es muy importante prestarle atención al modelo de juego. Un modelo de juego es una figura que usted tiene que completar para ganar el mismo. Completando dicha figura usted ganará en forma automática. Los modelos poseen cada uno una dificultad diferente, siendo algunos mas fáciles de completar que otros. Los modelos más sencillos son aquellos compuestos por líneas rectas en una de las direcciones: horizontal, vertical o diagonal. El "coverall" es el Bingo más sencillo y tradicional, donde usted tiene que cubrir la tarjeta completa para poder ganar.

El cartón de Bingo es una grilla cuadrículada de 5 por 5. Los cuadrados que lo conforman (25 de ellos) sirven para formar 5 líneas verticales y 5 líneas horizontales. Las líneas verticales corresponden a las 5 letras de la palabra Bingo,

siendo la primera línea vertical la que corresponde a la letra B, la segunda línea vertical a la de la I, y así sucesivamente hasta la quinta y última línea, que corresponde a la O de la palabra Bingo.

A cada línea vertical le corresponden ciertos números, que están siempre dentro del mismo rango, pero que varían dentro de éste por cada cartón de bingo. Siguiendo esta estructura, los números asignados para cada letra son los siguientes:

- B: del 1 al 15
- I: del 16 al 30
- N: del 31 al 45
- G: del 46 al 60
- O: del 61 al 75

Los números asignados a cada letra variarán de tarjeta en tarjeta, siendo generados de forma aleatoria cada vez que se imprime una tarjeta, por lo que es muy difícil encontrar dos cartones de bingo que tengan los mismos números. La ley de probabilidades indica que todos los números serán cantados por lo menos 3 veces por sesión de bingo (comprendiendo varios juegos de bingo)... pero esto no es así. Aquí le presentamos la Tabla Acumulativa de Probabilidades para ganar al Bingo.

Como ya dijimos, cada cartón de Bingo contiene 25 celdas divididas en una grilla de 5x5.

El espacio del centro está libre; es decir que hay 24 espacios que pueden haber sido acertados en el transcurso del juego.

Es decir que  $2^{24} = 16,777,216$  diferentes modelos pueden tener al menos una combinación ganadora. Para cada uno de estos 16,777,216 modelos, es necesario contar cuántos espacios están ocupados y calcular también si el modelo contiene un Bingo ganador.

Por ejemplo, si hay 24,10 combinaciones, hay 1,961,256 posibilidades de acertar 10 espacios de un cartón. Ahora habría que calcular cuántas de estas 1,961,256 posibilidades tienen al menos un Bingo ganador. Ahora podremos dividir este resultado por 1,961,256 y obtendremos la probabilidad de ganar al Bingo.



**TABLA ACUMULATIVA DE PROBABILIDADES**

Aciertos Comb.con un Total de Probabilidad de que haya en el cartón Bingo Combinaciones al menos un Bingo ganador

- 0 0 COMBIN(24, 0) = 1 0.000000
- 1 0 COMBIN(24, 1) = 24 0.000000
- 2 0 COMBIN(24, 2) = 276 0.000000
- 3 0 COMBIN(24, 3) = 2,024 0.000000
- 4 4 COMBIN(24, 4) = 10,626 0.000376
- 5 88 COMBIN(24, 5) = 42,504 0.002070
- 6 912 COMBIN(24, 6) = 134,596 0.006776
- 7 5,928 COMBIN(24, 7) = 346,104 0.017128
- 8 27,102 COMBIN(24, 8) = 735,471 0.036850
- 9 92,520 COMBIN(24, 9) = 1,307,504 0.071526
- 10 244,092 COMBIN(24,10) = 1,961,256 0.124457
- 11 507,696 COMBIN(24,11) = 2,496,144 0.203392
- 12 841,100 COMBIN(24,12) = 2,704,156 0.311040
- 13 1,113,360 COMBIN(24,13) = 2,496,144 0.446032
- 14 1,174,620 COMBIN(24,14) = 1,961,256 0.598912
- 15 981,424 COMBIN(24,15) = 1,307,504 0.750609
- 16 644,445 COMBIN(24,16) = 735,471 0.876234
- 17 331,056 COMBIN(24,17) = 346,104 0.959522
- 18 133,428 COMBIN(24,18) = 134,596 0.991322
- 19 42,480 COMBIN(24,19) = 42,504 0.999435

20 10,626 COMBIN(24,20) = 10,626 1.000000

21 2,024 COMBIN(24,21) = 2,024 1.000000

22 276 COMBIN(24,22) = 276 1.000000

23 24 COMBIN(24,23) = 24 1.000000

24 1 COMBIN(24,24) = 1 1.000000

## ALGUNOS TRUCOS PARA GANAR JUGANDO AL BINGO

Ganar al Bingo no es tan solo un tema de suerte, contrariamente a lo que muchos puedan pensar. Existen maneras para hacer inclinar las probabilidades a favor del jugador y de esta manera, convertirse en un jugador más consistente.

**¿Sabía usted que el matemático Joseph E. Granville, el inventor de las estrategias de reservas de mercado que tuvieron un gran éxito, dedicó gran parte de su espíritu analítico al juego de Bingo?**

Luego de varios años de búsquedas, desarrolló estrategias que han dado pruebas y que le darán una visión diferente y competitiva para probar su suerte al Bingo.

Las técnicas de Granville son tan simples que todo el mundo puede usarlas. No hay que hacer cálculos complicados ni grandes cálculos mentales. Granville sólo utiliza los procedimientos que usted debe seguir paso a paso y que lo harán ganar en cualquier juego de Bingo.

**¿Cree que esto es imposible?**

Varios estudios llevaron a Granville a la inevitable conclusión según la cual cada juego de Bingo sigue modelos definidos... modelos sobre los cuales el jugador es por lo general inconsciente.

Utilizando estos modelos, Granville descubrió cómo dominar las probabilidades en el Bingo. Y ahora, ¡usted puede hacerlo!

Granville descubrió relaciones cruciales entre los números de bingo que ganan y el panel en donde se anuncian. Él nos demuestra cómo utilizar estas verdades simples y demostradas para elegir más cartones de bingo ganadores.

Lo increíble es que usted puede en muchos casos aumentar sus chances de ganar, jugando con el menor número de cartones posibles.

Como todos sabemos, hay 75 bolas en una máquina de bingo, numeradas de 1 a 75. La probabilidad de que una bola salga antes que las otras es completamente igual, 1 en 75.

Dado que las probabilidades son iguales, esto se llama distribución uniforme.

Como las bolas salen de la máquina al azar, hay que tener en cuenta tres cosas:

- 1- Debe haber una cantidad igual de números que terminan en 1, 3, 4, 5, etc.
- 2- Los números pares e impares deben equilibrarse.
- 3- Los números fuertes y débiles deben equilibrarse.

Por otro lado, el estadista inglés Tippett afirmó en su libro "Cuando un muestreo aleatorio crece en tamaño, da un resultado que se acerca cada vez más al valor de la población". Según él, el tablero de 75 números constituía la "población".

El número medio en esta población es el promedio de los 75 números. De 1 a 75, el número medio es el 38. Los primeros números en salir en el Bingo pueden ser o no ser el 38, pero es seguro que a medida que el juego avance, el promedio de los números que salgan se acercará regularmente de 38.

Así, cuando los números de bingo salen, el juego entero (que contiene un promedio de 12 "llamadas") es un muestreo de la población entera y, cuanto más amplio sea el muestreo, más cercanos a 38 serán los números.

Es evidente que este hecho jugará un rol primordial en la selección estratégica de los cartones de bingo.